

3.2

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Σχετική συχνότητα ενδεχομένου A :

Είναι το πηλίκο $f_A = \frac{\kappa}{\nu}$ όπου κ το πλήθος των πραγματοποιήσεων του ενδεχομένου A σε ν το πλήθος εκτελέσεις του πειράματος

2.

Ιδιότητες της f , λ το πλήθος απλών ενδεχομένων :

i) $0 \leq f_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, \lambda$

ii) $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\lambda = 1$

3.

Νόμος μεγάλων αριθμών :

Όταν το πλήθος των δοκιμών ενός πειράματος τύχης αυξάνει απεριόριστα, οι σχετικές συχνότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς , (όχι πάντοτε ίδιους) .

4.

Ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα :

Είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα των οποίων οι σχετικές συχνότητες τείνουν στον ίδιο αριθμό, όσο το πλήθος των δοκιμών αυξάνει απεριόριστα .

5.

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας :

Σε πείραμα τύχης με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα ορίζουμε σαν **πιθανότητα** του ενδεχομένου A και συμβολίζουμε με $P(A)$ το πηλίκο

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

6.

Ιδιότητες

- $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- $P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A

7.

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας :

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Πιθανότητα του στοιχειώδους ενδεχόμενου ω_i ονομάζουμε έναν αριθμό $p(\omega_i)$ που να έχει τις ιδιότητες

- $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$
- $p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_n) = 1$
- Αν $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\} \neq \emptyset$ τότε $P(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_k)$
και $P(\emptyset) = 0$

8.

Απλός προσθετικός νόμος :

Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

9.

Για αντίθετα ενδεχόμενα ισχύει : $P(A') = 1 - P(A)$

10.

Προσθετικός νόμος:

Αν A, B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

11.

Αν $A \subseteq B$ τότε ισχύει : $P(A) \leq P(B)$

12.**Από διάγραμμα Venn ισχύουν**

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
 $A - B = A \cap B'$ άρα και ίσες πιθανότητες
- $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A)$
 $= P(A) + P(B) - 2 P(A \cap B)$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ άρα και ίσες πιθανότητες
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ άρα και ίσες πιθανότητες

13.**Παρατήρηση**

Οι κανόνες 8, 9, 10, 11, 12 ισχύουν ανεξαρτήτως του αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ή δεν είναι ισοπίθανα .

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ**1.****Προσοχή**

Ο τύπος $P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

χρησιμοποιείται μόνο για **ισοπίθανα** στοιχειώδη ενδεχόμενα.

2.**Προσοχή**

Για μη ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα, χρησιμοποιούμε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας .

3.**Συμφωνία**

Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και χρησιμοποιούμε τη φράση « **παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω** » εννοούμε ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα** .

4.

Για την απόδειξη ανισοτήτων

Θυμόμαστε $0 \leq P(A) \leq 1$

Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

Προσθετικός νόμος

5.

Μέθοδος

Τα ενδεχόμενα τα εκφράζουμε σαν σύνολα.

6.

Μέθοδος

Τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα συνήθως αποδεικνύονται με την « εις άτοπο απαγωγή »

7.

Δεν ξεχνώ

Η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου είναι ίση με την πιθανότητα του .

8.

Τρεις μορφές του προσθετικού νόμου

α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

β) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

γ) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις :

- i) Αν $P(A) = P(B)$, τότε $A = B$
- ii) Αν $P(A) \neq P(B)$, τότε $A \neq B$
- iii) Αν $A = B$, τότε $P(A) = P(B)$
- iv) Αν $A \neq B$, τότε $P(A) \neq P(B)$
- v) Αν $P(A) + P(B) = 1$, τότε $B = A'$

Λύση

Κατά σειρά είναι Λ , Σ , Σ , Λ , Λ

2.

Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά και επιλέγουμε ένα ενδεχόμενο στην τύχη.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A : ένδειξη μικρότερη του 5

B : ένδειξη άρτιος αριθμός

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

- i) Πραγματοποιείται το A
- ii) Πραγματοποιείται το B
- iii) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A , B
- iv) Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A , B

Σχόλιο 3

Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με $N(\Omega) = 6$
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ με $N(A) = 4$ και $N(B) = 3$

i) και ii)

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

iii)

Αναζητάμε την $P(A \cup B)$

Σχόλιο 9γ

Είναι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ με $N(A \cup B) = 5$, άρα $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

iv)

Αναζητάμε την $P(A - B) + P(B - A)$

Σχόλιο 9ζ

Είναι $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\} \cup \{6\} = \{1, 3, 6\}$ με $N[(A - B) \cup (B - A)] = 3$

Άρα $P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3.

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές την μία κατόπιν της άλλης και επιλέγουμε ένα αποτέλεσμα στην τύχη. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος και τις πιθανότητες των ενδεχομένων

A : Οι δύο πρώτες ρίψεις γράμματα

B : Ένα τουλάχιστον κεφάλι

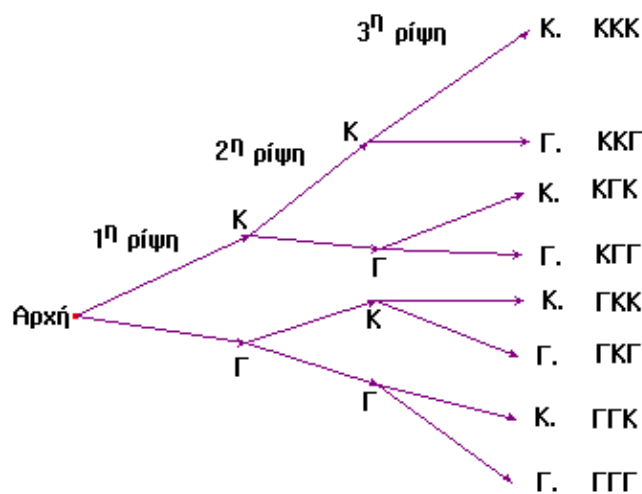
Γ : Πρώτη ρίψη γράμματα ή τρίτη ρίψη γράμματα

Δ : Πρώτη ρίψη κεφάλι και δεύτερη ρίψη γράμματα

E : Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα B, Γ και Δ

Λύση

Σχεδιάζουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα όπου K= κεφάλι, Γ= γράμματα



$$\Omega = \{ KKK, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, KK\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \} \quad \text{με } N(\Omega) = 8$$

$$A = \{ \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \} \quad \text{με } N(A) = 2$$

$$B = \{ KKK, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, KK\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K \} \quad \text{με } N(B) = 7$$

$$\Gamma = \{ K\Gamma\Gamma, KK\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \} \quad \text{με } N(\Gamma) = 6$$

$$\Delta = \{ K\Gamma K, K\Gamma\Gamma \} \quad \text{με } N(\Delta) = 2$$

$$E = B \cap \Gamma \cap \Delta = \{ K\Gamma\Gamma \} \quad \text{με } N(E) = 1$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{6}{8}$$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

4.

Σ' ένα εργοστάσιο παραγωγής ρουλεμάν , από μία βλάβη του υπολογιστή, παρουσιάστηκε αυξημένος αριθμός ρουλεμάν με όχι κανονικό μέγεθος .

Τα ρουλεμάν με μέγεθος μεγαλύτερο από το κανονικό ήταν διπλάσια από τα ρουλεμάν με μέγεθος μικρότερο από το κανονικό.

Τα ρουλεμάν με μέγεθος κανονικό ήταν πενταπλάσια από τα ρουλεμάν με μέγεθος μικρότερο από το κανονικό.

Επιλέγουμε ένα ρουλεμάν στην τύχη . Να βρείτε τις πιθανότητες

- i) Να έχει μέγεθος μικρότερο του κανονικού
- ii) Να έχει μέγεθος μεγαλύτερο του κανονικού
- iii) Να έχει κανονικό μέγεθος

Λύση

Έστω μ_1 το ενδεχόμενο «να επιλέξουμε ρουλεμάν μικρότερο του κανονικού »

μ_2 μεγαλύτερο

κ κανονικό

Σχόλιο 5

i)

Από υπόθεση έχουμε $N(\mu_2) = 2N(\mu_1)$ και $N(\kappa) = 5N(\mu_1)$.

Αλλά $N(\mu_1) + N(\kappa) + N(\mu_2) = N(\Omega) \Rightarrow N(\mu_1) + 5N(\mu_1) + 2N(\mu_1) = N(\Omega)$

$$8N(\mu_1) = N(\Omega)$$

$$\frac{N(\mu_1)}{N(\Omega)} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(\mu_1) = \frac{1}{8}$$

ii)

$$P(\kappa) = \frac{N(\kappa)}{N(\Omega)} = \frac{5N(\mu_1)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

iii)

$$P(\mu_2) = \frac{N(\mu_2)}{N(\Omega)} = \frac{2N(\mu_1)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

5.

Έστω $\Omega = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα ενδεχόμενα

$A = \{a \in \Omega \text{ με } a = \text{πολλαπλάσιο του } 4\}$

$B = \left\{ \beta \in \Omega \text{ με } \beta \text{ ρίζα της εξίσωσης } \frac{(x^2 - 6x + 8)(x - 10)}{x - 2} = 0 \right\}.$

Να βρείτε την πιθανότητα καθενός των ενδεχομένων

$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A - B)$

Λύση

Προφανώς είναι $A = \{4, 8, 12, 16\}$

Βρίσκοντας τις ρίζες της εξίσωσης $\frac{(x^2 - 6x + 8)(x - 10)}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$
 $(x^2 - 6x + 8)(x - 10) = 0$ και $x \neq 2$
 $x = 4$ ή $x = 10$
 Οπότε $B = \{10, 4\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cup B = \{10, 4, 8, 12, 16\} \text{ με } N(A \cup B) = 5,$$

$$A \cap B = \{4\} \text{ με } N(A \cap B) = 1$$

$$A - B = \{8, 12, 16\} \text{ με } N(A - B) = 3$$

$$\text{Άρα } P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}, \quad P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

$$P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

6.

Ένα κουτί περιέχει 40 μπάλες από τις οποίες 20 είναι άσπρες, 10 είναι μαύρες και οι υπόλοιπες πράσινες και κόκκινες. Επιλέγουμε μία μπάλα στην τύχη.

Η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $\frac{\lambda}{3\lambda+4}$, να είναι πράσινη είναι $\frac{\lambda-1}{9\lambda+2}$,

$\lambda \in \mathbb{N}$. Να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες πράσινες μπάλες έχει το κουτί.

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα : A «άσπρη» με $P(A) = \frac{20}{40}$

M «μαύρη» με $P(M) = \frac{10}{40}$

Π «πράσινη»

K «κόκκινη» με $P(\Pi \cup K) = \frac{10}{40}$

(πράσινες και οι κόκκινες μαζί είναι 10)

Επειδή τα ενδεχόμενα Π, K είναι ασυμβίβαστα $\Rightarrow P(\Pi \cup K) = P(\Pi) + P(K)$

$$P(\Pi) + P(K) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

Από τις υποθέσεις έχουμε $P(K) = \frac{\lambda}{3\lambda+4}$ και $P(\Pi) = \frac{\lambda-1}{9\lambda+2}$

$$H \quad (1) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{3\lambda+4} + \frac{\lambda-1}{9\lambda+2} = \frac{1}{4}$$

$$4\lambda(9\lambda+2) + 4(\lambda-1)(3\lambda+4) = (3\lambda+4)(9\lambda+2)$$

$$36\lambda^2 + 8\lambda + 12\lambda^2 + 16\lambda - 12\lambda - 16 = 27\lambda^2 + 6\lambda + 36\lambda + 8$$

$$21\lambda^2 - 30\lambda - 24 = 0$$

$$7\lambda^2 - 10\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$H \quad P(K) = \frac{\lambda}{3\lambda+4} \Rightarrow P(K) = \frac{2}{3 \cdot 2 + 4} = \frac{2}{10} \quad (2)$$

Αν x είναι το πλήθος των κόκκινων μπαλών, τότε $P(K) = \frac{x}{40} \quad (3)$

$$\text{Από τις (2), (3)} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{2}{10} \Rightarrow x = 8 \text{ οι κόκκινες, άρα } 2 \text{ οι πράσινες}$$

7.

Έστω $\Omega = \{x, y, z, \omega\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

i) Αν $P(x) = \frac{1}{2}$, $P(\omega) = \frac{1}{4}$, $P(z) = \frac{1}{8}$, να βρείτε την $P(y)$

ii) Αν $P(\omega) = P(z) = \frac{2}{5}$ και $P(x) = 3P(y)$, να βρείτε τις $P(x)$, $P(y)$

iii) Αν $A = \{z, y\}$ με $P(A) = \frac{3}{5}$, $B = \{y, \omega\}$ με $P(B) = \frac{1}{3}$
και $P(y) = \frac{1}{4}$, να βρείτε την $P(x)$.

Λύση

i)

$$\text{Είναι } P(x) + P(y) + P(z) + P(\omega) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(y) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

ii)

$$P(x) + P(y) + P(z) + P(\omega) = 1 \Rightarrow 3P(y) + P(y) + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$4P(y) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(y) = \frac{1}{20}$$

$$\text{Η } P(x) = 3P(y) \Rightarrow P(x) = \frac{3}{20}$$

iii)

$$P(A) = P(z) + P(y) \Rightarrow \frac{3}{5} = P(z) + \frac{1}{4} \Rightarrow P(z) = \frac{7}{20}$$

$$P(B) = P(y) + P(\omega) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + P(\omega) \Rightarrow P(\omega) = \frac{1}{12}$$

$$P(x) + P(y) + P(z) + P(\omega) = 1 \Rightarrow P(x) + \frac{1}{4} + \frac{7}{20} + \frac{1}{12} = 1$$

$$P(x) + \frac{15+21+5}{60} = 1$$

$$P(x) = 1 - \frac{41}{60} \Rightarrow P(x) = \frac{19}{60}$$

8.

Τα δυνατά αποτελέσματα $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ενός πειράματος τύχης πραγματοποιούνται με σχετικές συχνότητες $\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το α ώστε οι συχνότητες αυτές να αντιπροσωπεύουν τις πιθανότητες των ενδεχομένων $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

Λύση

Πρέπει $\alpha > 0$ και $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} = 1$

$$1 + 2 + 3 = \alpha$$

$$\alpha = 6$$

9.

Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 50\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $P(k) = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 50$ οι πιθανότητες των αντίστοιχων στοιχειωδών ενδεχομένων.

i) Να βρείτε την $P(0)$.

ii) Αν $A = \{2, 4, \dots, 50\}$, να βρείτε την $P(A)$

Λύση

i)

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(50) = 1 \Rightarrow P(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{50}} = 1 \quad (1)$$

Τα κλάσματα είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\text{Επομένως } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{50}} = S_{50} = \frac{\alpha_1(\lambda^{50} - 1)}{\lambda - 1} = \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{50} - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{50}}$$

$$(1) \Rightarrow P(0) + 1 - \frac{1}{2^{50}} = 1 \Rightarrow P(0) = \frac{1}{2^{50}}$$

ii)

$$P(A) = P(2) + P(4) + \dots + P(50) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{50}}.$$

Πρόκειται για το άθροισμα των 25 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με

$$\alpha_1 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$S_{25} = \frac{\alpha_1(\lambda^{25} - 1)}{\lambda - 1} = \frac{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{25} - 1 \right]}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{4^{25}} - 1 \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{25}}$$

10.

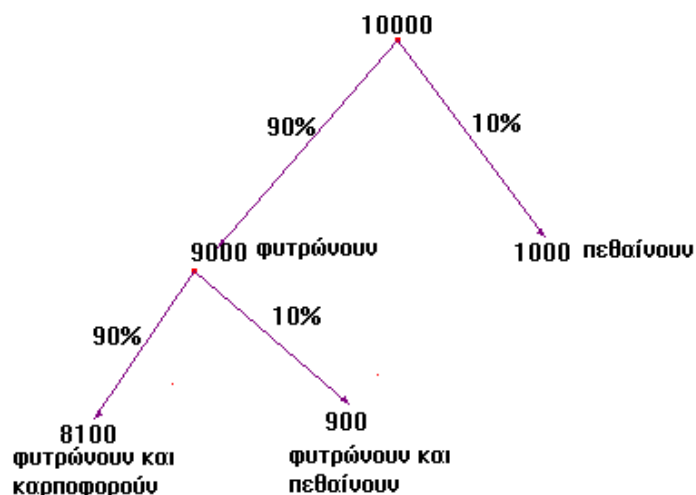
Είναι γνωστό ότι από 10000 σπόρους που φυτεύτηκαν θα φυτρώσει το 90% .
Από τα φυτά που θα φυτρώσουν μόνο το 90% θα ζήσει και θα καρποφορήσει .
Αν φυτέψουμε έναν σπόρο ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων :

A: ο σπόρος να μην φυτρώσει

B: ο σπόρος να φυτρώσει αλλά να πεθάνει

Γ: ο σπόρος να καρποφορήσει

Λύση



Σχόλιο 7

Με βάση το παραπάνω σχέδιο είναι

$$P(A) = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10} ,$$

$$P(B) = \frac{900}{10000} = \frac{9}{100} ,$$

$$P(\Gamma) = \frac{8100}{10000} = \frac{81}{100}$$

11.

Ένα δείγμα 50 οικογενειών ρωτήθηκε ως προς τον αριθμό των παιδιών τους .
Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα

Αρ. Παιδιών	0	1	2	3	4	5 ή περισσότερα
Αρ. οικογενειών	6	14	13	9	5	3

Επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

A: να μην έχει παιδιά

B: να έχει παιδιά αλλά όχι περισσότερα από 3

Γ: να έχει περισσότερα από 3 παιδιά

Δ: να μην έχει 3 ή 4 παιδιά

E: να έχει λιγότερα από 2 ή περισσότερα από 4

Λύση

$$P(A) = \frac{6}{50}$$

$$P(B) = \frac{14+13+9}{50} = \frac{36}{50}$$

$$P(\Gamma) = \frac{5+3}{50} = \frac{8}{50}$$

$$P(\Delta) = \frac{6+14+13+3}{50} = \frac{36}{50}$$

$$P(E) = \frac{6+14+3}{50} = \frac{23}{50}$$

12.

Σ' ένα κλουβί υπάρχουν 20 καναρίνια και 36 κοτσύφια . Τα τέσσερα πέμπτα των καναρινιών και τα μισά κοτσύφια κελαηδάνε .

Εκλέγουμε ένα πουλί στην τύχη . Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

- i) Είναι καναρίνι
- ii) Είναι κοτσύφι και κελαηδάει
- iii) Το πουλί κελαηδάει
- iv) Είναι καναρίνι ή κελαηδάει

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A : Το πουλί είναι καναρίνι

B : Το πουλί είναι κοτσύφι

Γ : Το πουλί κελαηδάει

i)

$$P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{20}{56}$$

ii)

$$P(B \cap \Gamma) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{18}{56} \quad (\text{τα κοτσύφια που κελαηδάνε είναι } \frac{1}{2} \cdot 36 = 18)$$

iii)

$$P(\Gamma) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{16+18}{56} = \frac{34}{56} \quad (\text{τα πουλιά που κελαηδάνε είναι } \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 36 = 16 + 18 = 34)$$

iv)

Αναζητάμε την $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma)$ **(1)**

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{16}{56} \quad (\text{τα καναρίνια που κελαηδάνε είναι } \frac{4}{5} \cdot 20 = 16)$$

$$(1) \Rightarrow P(A \cup \Gamma) = \frac{20}{56} + \frac{34}{56} - \frac{16}{56} = \frac{38}{56}$$

13.

Ένα σχολείο έχει 24 εκπαιδευτικούς, από τους οποίους οι 8 είναι άνδρες μεταξύ των οποίων 3 είναι φιλόλογοι. Επίσης υπάρχουν 10 γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε έναν εκπαιδευτικό στην τύχη . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

- i) Είναι γυναίκα και όχι φιλόλογος
- ii) Είναι άνδρας φιλόλογος
- iii) Είναι άνδρας ή φιλόλογος
- iv) Δεν είναι φιλόλογος

Λύση

Από τα δεδομένα προκύπτει ότι οι γυναίκες εκπαιδευτικοί είναι 16, εκ των οποίων οι 10 είναι φιλόλογοι , άρα οι 6 γυναίκες δεν είναι φιλόλογοι .

Έστω A το ενδεχόμενο να είναι άνδρας, οπότε $P(A) = \frac{8}{24}$.

A' είναι το ενδεχόμενο να μην είναι άνδρας, δηλαδή είναι γυναίκα με $P(A') = \frac{16}{24}$

Έστω Φ το ενδεχόμενο να είναι φιλόλογος, οπότε $P(\Phi) = \frac{13}{24}$

i)

Το ενδεχόμενο να είναι γυναίκα και όχι φιλόλογος, είναι το $A' \cap \Phi'$.

Οπότε $P(A' \cap \Phi') = \frac{6}{24}$

ii)

Το ενδεχόμενο να είναι άντρας φιλόλογος, είναι το $A \cap \Phi$.

Οπότε $P(A \cap \Phi) = \frac{3}{24}$

iii)

Το ενδεχόμενο να είναι άντρας ή φιλόλογος, είναι το $A \cup \Phi$.

Οπότε $P(A \cup \Phi) = P(A) + P(\Phi) - P(A \cap \Phi) = \frac{8}{24} + \frac{13}{24} - \frac{3}{24} = \frac{18}{24}$

iv)

Το ενδεχόμενο να μην είναι φιλόλογος, είναι το Φ' .

Οπότε $P(\Phi') = 1 - P(\Phi) = 1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$

14.

Σ' ένα χωριό με 48 οικογένειες, 36 έχουν έγχρωμη τηλεόραση, 16 έχουν ασπρόμαυρη και 6 έχουν και έγχρωμη και ασπρόμαυρη.

Αν επιλέξουμε μία οικογένεια στην τύχη, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

i) Να μην έχει ούτε έγχρωμη ούτε ασπρόμαυρη τηλεόραση.

ii) Να έχει μόνο ένα είδος τηλεόρασης.

iii) Να έχει ένα τουλάχιστον είδος τηλεόρασης.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα $E = \text{« Η οικογένεια έχει έγχρωμη τηλεόραση »}$

$M = \text{« Η οικογένεια έχει ασπρόμαυρη τηλεόραση »}$.

Τότε $E \cap M$ είναι το ενδεχόμενο « η οικογένεια έχει και έγχρωμη και ασπρόμαυρη τηλεόραση ».

Από υπόθεση έχουμε $P(E) = \frac{36}{48}$, $P(M) = \frac{16}{48}$ και $P(E \cap M) = \frac{6}{48}$

i)

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(E \cup M)'$

$$P(E \cup M)' = 1 - P(E \cup M)$$

$$= 1 - [P(E) + P(M) - P(E \cap M)]$$

$$= 1 - \frac{36}{48} - \frac{16}{48} + \frac{6}{48} = \frac{2}{48}$$

ii)

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(E - M) \cup (M - E)$

$$P[(E - M) \cup (M - E)] = P(E) + P(M) - 2P(E \cap M) = \frac{40}{48}$$

iii)

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $E \cup M$

$$P(E \cup M) = 1 - P(E \cup M)' = 1 - \frac{2}{48} = \frac{46}{48}$$

15.

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στους ασθενείς που πάσχουν από διαβήτη

ηλικία ασθενούς	ελαφριά περίπτωση		σοβαρή περίπτωση	
	διαβητικοί γονείς		διαβητικοί γονείς	
	ναί	όχι	ναί	όχι
κάτω των 40	15%	10%	8%	2%
άνω των 40	15%	20%	20%	10%

Επιλέγουμε έναν ασθενή στην τύχη και έστω τα ενδεχόμενα

A: Να έχει σοβαρή περίπτωση

B: Να είναι κάτω των 40

Γ: Οι γονείς του να είναι διαβητικοί

i) Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$, $P(B \cap \Gamma)$, $P(A \cap B \cap \Gamma)$

ii) Να περιγράψετε λεκτικά τα ακόλουθα ενδεχόμενα και να βρείτε τις πιθανότητες τους: $A' \cap B'$, $A' \cup \Gamma'$, $A' \cap B \cap \Gamma'$

Λύση

i)

Από τον πίνακα φαίνεται ότι οι ασθενείς που είναι σοβαρά είναι το 40% άρα

$$P(A) = 8\% + 20\% + 2\% + 10\% = 40\% = \frac{40}{100}$$

$$P(B) = 15\% + 10\% + 8\% + 2\% = 35\% = \frac{35}{100}$$

$$P(\Gamma) = 15\% + 15\% + 8\% + 20\% = 58\% = \frac{58}{100}$$

$B \cap \Gamma$ σημαίνει κάτω των 40 με διαβητικούς γονείς είναι το 23% άρα

$$P(B \cap \Gamma) = 15\% + 8\% = 23\% = \frac{23}{100}$$

$A \cap B \cap \Gamma$ σημαίνει σοβαρή περίπτωση, κάτω των 40 γονείς διαβητικοί.

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = 8\% = \frac{8}{100}$$

ii)

$A' \cap B'$ σημαίνει ελαφριά περίπτωση, άνω των 40.

$$P(A' \cap B') = 15\% + 25\% = 35\% = \frac{35}{100}$$

$A' \cup \Gamma'$ σημαίνει ελαφριά περίπτωση ή οι γονείς δεν είναι διαβητικοί.

$$P(A' \cup \Gamma') = 15\% + 15\% + 10\% + 20\% + 2\% + 10\% = 72\% = \frac{72}{100}$$

$A' \cap B \cap \Gamma'$ σημαίνει ελαφριά περίπτωση, κάτω των 40, γονείς όχι διαβητικοί.

$$P(A' \cap B \cap \Gamma') = 10\% = \frac{10}{100}$$

16.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω έτσι ώστε

$$P(A - B) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{20} \quad \text{και} \quad P(B' - A) = \frac{1}{2}$$

i) Να βρείτε την $P(A)$

ii) Να δείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{4}$

Λύση

i)

$$P(A - B) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) - \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

ii)

$$P(B' - A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B') - P(B' \cap A) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Από διάγραμμα Venn έχουμε $B' \cap A = A - B$

$$(1) \Rightarrow P(B') - P(A - B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B') - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B') = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \text{οπότε} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

17.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$ και $P(A \cap B) = 0,3$.

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχόμενων

- i) Δεν πραγματοποιείται το A
- ii) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B
- iii) Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B
- iv) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B
- v) Πραγματοποιείται μόνο το A
- vi) Ένα μόνο από τα A, B πραγματοποιείται

Λύση

i)

Δεν πραγματοποιείται το A , σημαίνει ότι πραγματοποιείται το A' .

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$$

ii)

Ένα τουλάχιστον από τα A, B πραγματοποιείται, σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,5 - 0,3 = 0,9$$

iii)

Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A, B σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A \cap B)'$ άρα

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

iv)

Κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται, σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$, άρα

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$$

v)

Πραγματοποιείται μόνο το A , σημαίνει ότι πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B , δηλαδή πραγματοποιείται το $A - B$.

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= 0,7 - 0,3 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

vi)

Ένα μόνο από τα A, B πραγματοποιείται, σημαίνει ότι πραγματοποιείται το A και όχι το B ή το B και όχι το A , δηλαδή πραγματοποιείται το $(A - B) \cup (B - A)$.

Επειδή όμως τα $(A - B)$, $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα, θα είναι

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) \quad (1)$$

Όπως στο (v), βρίσκουμε $P(B - A) = 0,2$

$$(1) \Rightarrow P[(A - B) \cup (B - A)] = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

18.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,8$ και $P(A \cap B)' = 0,3$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

- i) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B
- ii) Πραγματοποιείται μόνο το B
- iii) Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B
- iv) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B .

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Καταρχήν } P(A \cap B)' = 0,3 &\Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,3 \\ P(A \cap B) &= 1 - 0,3 \\ P(A \cap B) &= 0,7 \end{aligned}$$

i)

Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B , σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,9 + 0,8 - 0,7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii)

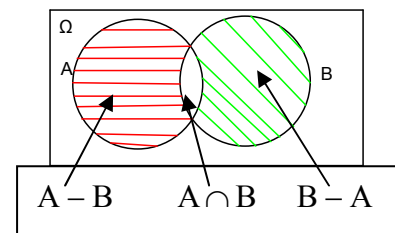
Πραγματοποιείται μόνο το B σημαίνει ότι πραγματοποιείται το $B - A$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } P(B - A) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,8 - 0,7 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

iii)

Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B , σημαίνει ότι πραγματοποιείται το $(A - B) \cup (B - A)$ και επειδή τα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,9 - 0,7 + 0,8 - 0,7 \\ &= 0,3. \end{aligned}$$

**iv)**

Κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται, σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$.

$$\text{Οπότε } P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$$

19.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cup B) = 0,7$ και $P(A') = 0,6$.

Να βρείτε την πιθανότητα $P(A' \cap B)$.

Λύση

$$P(A') = 0,6 \Rightarrow 1 - P(A) = 0,6 \Rightarrow P(A) = 0,4$$

Σε διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι $A' \cap B = B - A$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } P(A' \cap B) &= P(B - A) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \quad (1) \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = 0,7 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7$$

$$0,4 + P(B) - P(A \cap B) = 0,7$$

$$P(B) - P(A \cap B) = 0,3$$

$$(1) \Rightarrow P(A' \cap B) = 0,3$$

20.

Αν $P(A \cap B) = 0,6$, να βρεθεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$

Λύση

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') \quad (1) \quad (\text{προσθετικός νόμος})$$

Επειδή $A - B = A \cap B'$, ο τύπος $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ γίνεται

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B') \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη (2) για A', B' : $P(A' \cap B') = P(A') - P(A' \cap B)$

$$\text{Οπότε, η (1)} \Rightarrow P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - [P(A') - P(A' \cap B)]$$

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A') + P(A' \cap B)$$

$$P(A' \cup B') = P(B') + P(A' \cap B) \quad (3)$$

Αλλά $B - A = B \cap A' = A' \cap B$

$$(1) \Rightarrow P(A' \cup B') = P(B') + P(B - A)$$

$$P(A' \cup B') = P(B') + P(B) - P(B \cap A)$$

$$P(A' \cup B') = 1 - P(B \cap A)$$

$$P(A' \cup B') = 1 - 0,6$$

$$P(A' \cup B') = 0,4$$

21.

Ένας μηχανικός επιθεωρεί, ως προς το μέγεθος και την συσκευασία, εξαρτήματα που παράγει μια βιομηχανία. Ένα εξάρτημα θεωρείται ελαττωματικό λόγω μεγέθους (πολύ μεγάλο ή πολύ μικρό), ή λόγω κακής συσκευασίας (λάθος ετικέτα ή σωστή ετικέτα σε λάθος θέση) .

Δίνεται ότι ισχύει ο διπλανός πίνακας

Ένα εξάρτημα επιλέγεται στην τύχη .

Να βρείτε την πιθανότητα καθενός των ενδεχομένων :

- i) Ελαττωματικό λόγω μεγέθους
- ii) Ελαττωματικό λόγω ετικέτας
- iii) Ελαττωματικό λόγω μεγέθους ή λόγω ετικέτας
- iv) Ελαττωματικό λόγω μεγέθους και λόγω ετικέτας

Ενδεχόμενο	Πιθανότητα
Πολύ μεγάλο (M_1)	0,12
Πολύ μικρό (M_2)	0,08
Λάθος ετικέτα (E_1)	0,15
Σωστή ετικέτα σε λάθος θέση (E_2)	0,02
Αποδεκτό	0,72

Λύση

i)

Έστω M το ενδεχόμενο « ελαττωματικό λόγω μεγέθους ».

Τότε $M = M_1 \cup M_2$ και επειδή M_1, M_2 ασυμβίβαστα θα έχουμε

$$P(M) = P(M_1 \cup M_2)$$

$$= P(M_1) + P(M_2)$$

$$= 0,12 + 0,08 = 0,2$$

ii)

Έστω E το ενδεχόμενο « ελαττωματικό λόγω ετικέτας ».

Τότε $E = E_1 \cup E_2$ και επειδή E_1, E_2 ασυμβίβαστα θα έχουμε

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2)$$

$$= P(E_1) + P(E_2)$$

$$= 0,15 + 0,02 = 0,17$$

iii)

Έστω A το ενδεχόμενο « αποδεκτό »

Το ενδεχόμενο « ελαττωματικό λόγω μεγέθους ή λόγω ετικέτας » είναι το $M \cup E$

Ταυτόχρονα όμως είναι το « μη αποδεκτό », δηλαδή το A' .

$$\text{Οπότε } P(M \cup E) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,72 = 0,28$$

iv)

Το ενδεχόμενο « ελαττωματικό λόγω μεγέθους και λόγω ετικέτας » είναι το $M \cap E$.

$$\text{Οπότε } P(M \cap E) = P(M) + P(E) - P(M \cup E)$$

$$= 0,2 + 0,17 - 0,28 = 0,09$$

Σχόλιο 5

Σχόλιο 9

22.

Σε ένα σύνολο μαθητών το 20% δε μαθαίνει Αγγλικά, το 60% δε μαθαίνει Γαλλικά και το 15% δε μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες, δηλαδή ούτε Αγγλικά ούτε Γαλλικά. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

- i) Ο μαθητής μαθαίνει μία τουλάχιστον γλώσσα
- ii) Ο μαθητής μαθαίνει και τις δύο γλώσσες
- iii) Ο μαθητής μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο «μαθαίνει Αγγλικά».

Αφού 20% δε μαθαίνει Αγγλικά $\Rightarrow P(A) = 80\%$

Έστω Γ το ενδεχόμενο «μαθαίνει Γαλλικά».

Αφού 60% δε μαθαίνει Γαλλικά $\Rightarrow P(\Gamma) = 40\%$

i)

15% δε μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες $\Rightarrow 85\%$ μαθαίνει μία τουλάχιστον

Αυτό όμως είναι το $A \cup \Gamma$

Άρα $P(A \cup \Gamma) = 85\%$

ii)

Το ενδεχόμενο «Ο μαθητής μαθαίνει και τις δύο γλώσσες» είναι το $A \cap \Gamma$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } P(A \cap \Gamma) &= P(A) + P(\Gamma) - P(A \cup \Gamma) \\ &= 80\% + 40\% - 85\% \\ &= 35\% \end{aligned}$$

iii)

Το ενδεχόμενο «Ο μαθητής μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες» είναι το

$$(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A).$$

Επειδή όμως τα $A - \Gamma$, $\Gamma - A$ είναι ασυμβίβαστα (διάγραμμα Venn), θα έχουμε

$$\begin{aligned} P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] &= P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) \\ &= P(A) - P(A \cap \Gamma) + P(\Gamma) - P(\Gamma \cap A) \\ &= 80\% - 35\% + 40\% - 35\% \\ &= 50\% \end{aligned}$$

23.

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,7$ και $P(B) = 0,8$.

i) Εξετάστε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα

ii) Δείξτε ότι $0,5 \leq P(A \cap B) \leq 0,7$

iii) Δείξτε ότι $P(A \cup B)' \leq 0,2$

Λύση

i)

Έστω ότι τα A, B είναι ασυμβίβαστα τότε $A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= 0,7 + 0,8 = 1,5 > 1 \end{aligned}$$

που είναι άτοπο

Σχόλιο 6

ii)

- Για την ανισότητα $P(A \cap B) \leq 0,7$

$$\text{Είναι } A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A \cap B) \leq 0,7$$

- Για την ανισότητα $P(A \cap B) \geq 0,5$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0,5$

$$0,7 + 0,8 - P(A \cup B) \geq 0,5$$

$$P(A \cup B) \leq 1 \quad \text{που ισχύει}$$

Σχόλιο 4

iii)

$$P(A \cup B)' \leq 0,2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) \leq 0,2$$

$$P(A \cup B) \geq 0,8$$

$$P(A \cup B) \geq P(B) \quad \text{που ισχύει αφού } B \subseteq (A \cup B).$$

24.

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Αν $P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$, δείξτε ότι :

i) $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$

ii) Το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το κενό.

Λύση

$$P(A') \leq 0,28 \Rightarrow 1 - P(A) \leq 0,28$$

$$1 - 0,28 \leq P(A)$$

$$P(A) \geq 0,72 \quad (1)$$

$$P(B') \leq 0,71 \Rightarrow 1 - P(B) \leq 0,71$$

$$1 - 0,71 \leq P(B)$$

$$P(B) \geq 0,29 \quad (2)$$

i)

Αρκεί ναδειχθεί ότι $P(A \cap B) + P(A \cup B) \geq 1,01$

Αλλά ο προσθετικός νόμος γράφεται $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Οπότε, αρκεί ναδειχθεί ότι $P(A) + P(B) \geq 1,01$ που ισχύει,

$$\text{αφού } P(A) + P(B) \stackrel{(1),(2)}{\geq} 0,72 + 0,29 = 1,01$$

ii)

Έστω ότι είναι $A \cap B = \emptyset$ τότε $P(A \cap B) = 0$

$$\text{και } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \stackrel{(1),(2)}{\geq} 0,72 + 0,29 = 1,01$$

που είναι άτοπο

Σχόλιο 4

25.

Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, δείξτε ότι

$$2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B).$$

Λύση

- Για την ανισότητα $2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

$$\begin{aligned} \text{Αρκεί} \quad & 2[P(A) + P(B) - P(A \cup B)] \leq P(A) + P(B) \\ \text{»} \quad & 2P(A) + 2P(B) - 2P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \\ \text{»} \quad & P(A) + P(B) \leq 2P(A \cup B) \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B)$$

$$\text{Και } B \subseteq A \cup B \Rightarrow \frac{P(B) \leq P(A \cup B)}{P(A) + P(B) \leq 2P(A \cup B)}$$

- Για την ανισότητα $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$

$$\text{Αρκεί } P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\text{Αρκεί } P(A \cup B) \leq 1 \text{ που ισχύει}$$

26.

Έστω A ένα ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω με $A \neq \Omega$ και $A \neq \emptyset$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{P(A)}{4}x^2 + \frac{P(A)}{8}x + 2010$.

Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

Έχουμε $A_f = \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{P(A)}{2}x + \frac{P(A)}{8}$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου f' είναι $\Delta = \frac{P(A)[P(A)-1]}{4}$.

Γνωρίζουμε ότι $0 \leq P(A) \leq 1$ και επειδή το $A \neq \Omega$ και $A \neq \emptyset$ θα είναι $0 < P(A) < 1$, άρα $\Delta < 0$, οπότε το τριώνυμο f' είναι ομόσημο του $\alpha = \frac{1}{2} > 0$. Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς ακρότατα.

27.

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με 20 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $A \neq \emptyset$ ένα ενδεχόμενο αυτού. Έστω ακόμα η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2P(A)x$.

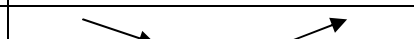
i) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν το ακρότατο της f είναι ίσο με $-\frac{1}{8}$ να βρείτε την $P(A)$ και το πλήθος των στοιχείων του A .

Λύση**i)**

Είναι $A_f = \mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x - 2P(A)$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f :

x	$-\infty$	$P(A)/2$	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{P(A)}{2}$,

$$\begin{aligned} f_{\min} &= f\left(\frac{P(A)}{2}\right) = 2\left(\frac{P(A)}{2}\right)^2 - 2P(A)\left(\frac{P(A)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(P(A))^2 - (P(A))^2 = -\frac{1}{2}(P(A))^2 \end{aligned}$$

ii)

$$-\frac{1}{2}(P(A))^2 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow (P(A))^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2} \text{ αφού } P(A) > 0$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N(A)}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow N(A) = 10$$

28.

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ και το ενδεχόμενο

$$A = \left\{ \kappa \in \Omega \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{\kappa}{\kappa^2 + 3} \right\}, \text{ όπου } f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

$$\text{Αν } P(0) = \frac{6}{5}P(1) = \frac{3}{2}P(2) = 2P(3), \text{ να βρείτε :}$$

i) Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

ii) Το πεδίο ορισμού της f και το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

iii) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$

Λύση

i)

$$P(0) = \frac{6}{5}P(1) = \frac{3}{2}P(2) = 2P(3) \Rightarrow P(1) = \frac{5}{6}P(0), \quad P(2) = \frac{2}{3}P(0), \quad P(3) = \frac{1}{2}P(0),$$

$$\text{Αλλά } P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1 \Rightarrow P(0) + \frac{5}{6}P(0) + \frac{2}{3}P(0) + \frac{1}{2}P(0) = 1$$

$$P(0) \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

$$P(0) \frac{6+5+4+3}{6} = 1$$

$$18P(0) = 6 \Rightarrow P(0) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Οπότε } P(1) = \frac{5}{18}, \quad P(2) = \frac{2}{9} \text{ και } P(3) = \frac{1}{6}$$

ii)

Για να ορίζεται η f πρέπει $x-1 \geq 0$ και $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $x \neq 5$

άρα $A_f = [1, 5) \cup (5, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{\kappa}{\kappa^2 + 3} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\kappa^2 + 3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = 3$$

$$\text{Άρα } A = \{1, 3\} \text{ και } P(A) = P(1) + P(3) = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

29.

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω έτσι ώστε να ισχύουν

α) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ένα τουλάχιστον από τα A, B είναι $\frac{7}{8}$

β) Οι πιθανότητες $P(A), P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο

$$X = \left\{ \kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}, \text{ όπου } \kappa = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

i) Να βρείτε το κ

ii) Να βρεθούν οι $P(A), P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

iii) Να βρεθούν οι πιθανότητες α) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B

β) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A

Λύση

i)

$$\text{Είναι } \kappa = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x - 5)}{(x - 1)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x - 1} = \frac{3}{4}$$

ii)

$$\text{Είναι } X = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$$

Τύποι θεωρίας

Επειδή $\frac{5}{4} > 1$, δε μπορεί να εκφράζει πιθανότητα .

Επειδή $A \cap B \subseteq A$, θα είναι $P(A \cap B) \leq P(A)$ και επειδή $P(A \cap B) \neq P(A)$

$$\text{θα είναι } P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{ και } P(A) = \frac{3}{4}$$

iii)

$$\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \frac{3}{4} + P(B) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

$$\beta) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} .$$

30.

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha^2 - \alpha - 3, \text{ όπου } \alpha \in \Omega$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{ \text{η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο της } K(1, f(1)) \text{ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων} \}$

Λύση

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + (\alpha + 1)1 + \alpha^2 - \alpha - 3 \\ &= 1 - 3 + \alpha + 1 + \alpha^2 - \alpha - 3 \\ &= \alpha^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + \alpha + 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + \alpha + 1 \\ &= 3 - 6 + \alpha + 1 \\ &= \alpha - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η εφαπτομένη στο } K(1, f(1)) \text{ έχει εξίσωση: } y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \\ y - (\alpha^2 - 4) &= (\alpha - 2)(x - 1) \\ y - \alpha^2 + 4 &= (\alpha - 2)x - \alpha + 2 \\ y &= (\alpha - 2)x + \alpha^2 - \alpha - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η εφαπτομένη διέρχεται από το } O(0, 0) &\Leftrightarrow 0 = (\alpha - 2) \cdot 0 + \alpha^2 - \alpha - 2 \\ \alpha^2 - \alpha - 2 &= 0 \\ \alpha &= 2 \text{ αφού } \alpha \in \Omega \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A = \{2\}, \quad N(A) = 1 \text{ και } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

31.

Ρίχνουμε ένα ζάρι και έστω Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος .
Επιλέγουμε ένα στοιχείο του Ω στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων :

$$A = \{\alpha \in \Omega, \text{ ώστε } \bar{x} = -2\}, \text{ όπου } \bar{x} \text{ η μέση τιμή των παρατηρήσεων } \alpha^3, 5-2\alpha^2, 7-2\alpha^2, -12, -7\alpha$$

$$B = \{\beta \in \Omega \text{ ώστε η διάμεσος των παρατηρήσεων } 4, \beta, 0, 6, 3, 4 \text{ να είναι } 3,5\}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in \Omega \text{ ώστε η εξίσωση } x^2 + 4x + \gamma = 0 \text{ να είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}\}$$

$$\Delta = \{\delta \in \Omega \text{ ώστε η συνάρτηση } f \text{ να έχει ελάχιστο στο } x_0 = 2\},$$

$$\text{όπου } f(x) = x^2 + (\delta^2 - 5\delta)x + 10$$

Λύση

$$\text{Είναι } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ με } N(\Omega) = 6$$

i)

$$\bar{x} = -2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^3 + 5 - 2\alpha^2 + 7 - 2\alpha^2 - 12 - 7\alpha}{5} = -2$$

$$\alpha^3 - 4\alpha^2 - 7\alpha = -10$$

$$\alpha^3 - 4\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0 \quad \text{Προφανής ρίζα } \alpha = 1$$

$$\text{Σχήμα Horner και δευτεροβάθμια: } \alpha = -2 \text{ ή } \alpha = 5$$

$$\text{Δεκτές οι } \alpha = 1 \text{ και } \alpha = 5, \text{ αφού } \alpha \in \Omega$$

$$\text{Άρα } A = \{1, 5\} \text{ και } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ii)

Τοποθετούμε τις γνωστές παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά $0, 3, 4, 4, 6$

Αφού $\beta \in \Omega$, για να είναι η διάμεσος 3,5, θα πρέπει το β να είναι 1 ή 2 ή 3 .

$$\text{Άρα } B = \{1, 2, 3\} \text{ και } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

iii)

$$\text{Η εξίσωση } x^2 + 4x + \gamma = 0 \text{ αδύνατη στο } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Delta < 0 \\ 16 - 4\gamma < 0 \\ \gamma > 4 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \{5, 6\} \text{ και } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

iv)

$$\text{Ελάχιστο στο } x_0 = 2 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{2\alpha} = 2 \Leftrightarrow -\frac{\delta^2 - 5\delta}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$-\delta^2 + 5\delta = 4 \Leftrightarrow \delta^2 - 5\delta + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\delta = 1 \text{ ή } \delta = 4$$

$$\text{Άρα } \Delta = \{1, 4\} \text{ και } P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

32.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B).$$

Έστω και η συνάρτηση $f(x) = [x - P(A \cup B)]^3 - [x - P(A \cap B)]^3$, $x \in \mathbb{R}$

i) Δείξτε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$

ii) Δείξτε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$

iii) Αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα δείξτε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

Λύση

i)

$$2P(A \cap B) \neq P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$$

ii)

$$f'(x) = 3[x - P(A \cup B)]^2 - 3[x - P(A \cap B)]^2$$

Μηδενισμός της f' : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$3[x - P(A \cup B)]^2 - 3[x - P(A \cap B)]^2 = 0$$

$$(x - P(A \cup B) + x - P(A \cap B))(x - P(A \cup B) - x + P(A \cap B)) = 0$$

$$(x - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + x - P(A \cap B))(P(A \cap B) - P(A \cup B)) = 0$$

$$(2x - P(A) - P(B))(P(A \cap B) - P(A \cup B)) = 0$$

$$x = \frac{P(A) + P(B)}{2} \quad \text{αφού από το (i) είναι } P(A \cap B) \neq P(A \cup B).$$

Πρόσημο της f' : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\dots\dots\dots$$

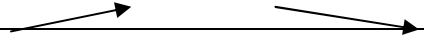
$$(2x - P(A) - P(B))(P(A \cap B) - P(A \cup B)) > 0 \quad (1)$$

Επειδή $(A \cap B) \subseteq (A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) < P(A \cup B)$

$$P(A \cap B) - P(A \cup B) < 0$$

Οπότε, η (1) $\Leftrightarrow 2x - P(A) - P(B) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{P(A) + P(B)}{2}$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$	$\frac{P(A) + P(B)}{2}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$

iii)

$$f(P(A)) = (P(A) - P(A \cup B))^3 - (P(A) - P(A \cap B))^3 \\ = [P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cap B)]^3 - [P(A)]^3 \\ = [-P(B)]^3 - [P(A)]^3$$

$$= -(P(B))^3 - (P(A))^3$$

αφού $P(A \cap B) = 0$ δεδομένου ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα

Ομοίως προκύπτει ότι $f(P(B)) = -(P(A))^3 - (P(B))^3$

netsuccess.gr